Abril-Julio 2018

Solución Parcial 2 (35 %) MA1112

Pregunta 1 (8 Pts)

Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

Solución

Hacemos el cambio $\boxed{u = \sqrt{1-e^x}}$, entonces $u^2 = 1 - e^x$, y luego $e^x = 1 - u^2$. Derivando la segunda expresión obtenemos $2udu = -e^x dx$, y despejando el diferencial obtenemos $dx = \frac{-2udu}{e^x} = \frac{-2udu}{1-u^2} = \boxed{\dfrac{2udu}{u^2-1} = dx}$. Sustituimos en la integral, y nos queda:

$$\int \frac{2\cancel{u}du}{(u^2-1)\cancel{u}} = \int \frac{2du}{u^2-1}$$

Utilizamos Descomposición en Fracciones Simples en el integrando.

$$\begin{array}{ccl} \dfrac{2}{(u-1)(u+1)} & = & \dfrac{A}{u-1} + \dfrac{B}{u+1} \\ 2 & = & A(u+1) + B(u-1) \\ u = 1 & \rightarrowtail & 2 = 2A \quad \rightarrowtail A = 1 \\ u = -1 & \rightarrowtail & 2 = -2B \quad \rightarrowtail B = -1 \end{array}$$

Entonces, $\dfrac{2}{(u-1)(u+1)} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$. Luego,

$$\begin{array}{ccll} \int \dfrac{2du}{u^2-1} & = & \int \left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1} \right) du & \\ & = & \ln|u-1| - \ln|u+1| + C & \text{(Devolviendo el cambio y aplicando propiedades de } \ln(.)) \\ & = & \ln\left| \dfrac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| + C & \end{array}$$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} = \boxed{\ln\left| \frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1} \right| + C}$$

Pregunta 2 (6 Pts)

Calcule la siguiente integral:

$$\int x \arctan x dx$$

Solución

Aplicando integración por partes, hacemos $u = \arctan x$, $du = \frac{dx}{x^2+1}$, $dv = xdx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Así, la integral queda:

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \tfrac{x^2}{2} \arctan x - \tfrac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx \\
&= \tfrac{x^2}{2} \arctan x - \tfrac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\
&= \tfrac{x^2}{2} \arctan x - \tfrac{1}{2} \int dx + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \tfrac{x^2}{2} \arctan x - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \arctan x + C \\
&= \tfrac{x^2+1}{2} \arctan x - \tfrac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int x \arctan x dx = \boxed{\frac{x^2+1}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C}$$

Pregunta 3 (8 Pts)

Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$$

Solución

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1+4)^2} = \int \frac{dx}{((x-1)^2+4)^2} = \int \frac{dx}{((x-1)^2+(2)^2)^2}$$

Hacemos el cambio trigonométrico: $x - 1 = 2\tan\theta$, $dx = 2\sec^2\theta d\theta$. Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4)^2(\tan^2\theta+1)^2} = \int \frac{\cancel{2}\sec^2\theta d\theta}{\cancel{16}(\sec^2\theta)^2} = \frac{1}{8} \int \frac{\cancel{\sec^2\theta} d\theta}{\sec^{\cancel{4}}\theta}$$

Resultando,

$$\frac{1}{8} \int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = \frac{1}{16} \int d\theta + \frac{1}{16} \int \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + C$$

Pero $\dfrac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta\cos\theta$. Luego, como $\frac{x-1}{2} = \tan\theta = \frac{CO}{CA}$, tenemos que $\theta = \arctan(\frac{x-1}{2})$, $\sin\theta = \frac{CO}{h} = \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}$ y $\cos\theta = \frac{CA}{h} = \dfrac{2}{\sqrt{(x-1)^2+4}}$.

Sustitutendo todo esto, obtenemos finalmente que:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}(\sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{1}{16}\arctan(\tfrac{x-1}{2}) + \frac{1}{\cancel{16}}\left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\right) + C \\
&= \boxed{\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x-1}{8(x^2-2x+5)} + C}
\end{aligned}
$$

Pregunta 4 (8 Pts)

Encuentre la ecuación de la recta tangente para $y = (\sin x)^{\cos(x)} + x$, en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1)$

Solución

Para determinar la ecuación de una recta, necesitamos un punto y su pendiente (o dos puntos de la recta, sin embargo no es la manera óptima para resolver este problema). El punto, ya lo tenemos: $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1)$. Para hallar la pendiente derivamos y, y evaluamos en $\pi/2$.

Sean $y_1 = (\sin x)^{\cos(x)}$ y $y_2 = x$, entonces $y = y_1 + y_2$. Luego

$$y' = [y_1 + y_2]' = y_1' + y_2'$$

Es claro, por un lado, que $y_2' = x' = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ (en particular, para $x = \pi/2$). Para y_1' usamos derivación logarítmica:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (\sin x)^{\cos(x)} \\
\ln(y_1) &= \cos x \ln(\sin x) \qquad \text{(Derivando a ambos lados)} \\
\tfrac{1}{y_1} y_1' &= -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} \\
y_1' &= y_1 \left[-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] \\
y_1' &= (\sin x)^{\cos(x)} \left[-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right] \qquad \text{(Evaluando en } \pi/2 \text{)} \\
y_1'(\pi/2) &= 1^0 \left[-(1)\cancel{\ln(1)} + \frac{0}{1}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Luego, el valor de la pendiente es $y'(\pi/2) = y_1'(\pi/2) + y_2'(\pi/2) = 0 + 1 = 1$

Finalmente, utilizando la fórmula de punto-pendiente. La recta viene dada por la ecuación:

$$y - (\frac{\pi}{2} + 1) = (1)(x - \frac{\pi}{2})$$

Es decir, $\boxed{y = x + 1}$

Pregunta 5 (5 Pts)

Resuelva la siguiente ecuación:

$$7^{2x+1} - 5^{3x} = 0$$

Solución

$$\begin{aligned}
7^{2x+1} - 5^{3x} &= 0 \\
7^{2x+1} &= 5^{3x} \quad \text{(Aplicando ln() a ambos lados, posible pues las bases son positivas)} \\
\ln(7^{2x+1}) &= \ln(5^{3x}) \\
(2x+1)\ln 7 &= (3x)\ln 5 \\
2x\ln 7 + \ln 7 &= 3x\ln 5 \\
3x\ln 5 - 2x\ln 7 &= \ln 7 \\
x(3\ln 5 - 2\ln 7) &= \ln 7 \\
x &= \frac{\ln 7}{3\ln 5 - 2\ln 7}
\end{aligned}$$

Finalmente, la solución a la ecuación es

$$\boxed{x = \frac{\ln 7}{3\ln 5 - 2\ln 7}}$$